PS Algorithmen für verteilte Systeme

https://avs.cs.sbg.ac.at/

Übungsblatt 4

Aufgabe 1

Deutsch: In der Vorlesung haben wir nur Spanner-Konstruktionen für ungerichtete Graphen kennengelernt. Zeigen Sie, dass für *gerichtete* Graphen im Allgemeinen keine nicht-trivialen Spanner existieren, das heißt, dass es für jedes n einen gerichteten Graph mit n Knoten gibt, in dem jeder t-Spanner für $t < n$ mindestens $\Omega(n^2)$ Kanten hat.

Hinweis: Sie müssen nicht davon ausgehen, dass der Ausgangsgraph stark zusammenhängend ist, d. h., es darf Knoten u und v geben, für die es keinen Pfad von u nach v gibt (also $\text{dist}(u, v) = \infty$).

English: In the lecture we have only seen spanner constructions for undirected graphs. Show that in general there do not exist non-trivial spanners for *directed* graphs, i.e., show that for each n there exists a graph for which any t-spanner with $t < n$ has at least $\Omega(n^2)$ edges.

Hint: You should not assume that the graph you are looking for is strongly connected, i.e., it is allowed that for a pair of nodes $u, v \in V$ there is no path from u to v (so $\text{dist}(u, v) = \infty$).

Aufgabe 2

Deutsch: In der Vorlesung haben wir einen Greedy-Algorithmus kennengelernt, der für eine beliebig gewählte Ganzzahl $k \geq 2$ einen $(2k - 1)$-Spanner eines gegebenen ungerichteten, ungewichteten Graphen berechnet. Zeigen Sie, dass mit einer Modifikation des Greedy-Algorithmus für jeden gegebenen ungerichteten, *gewichteten* Graph ein $(2k - 1)$-Spanner mit $O(n^{1+1/k})$ Kanten konstruiert werden kann.

English: In the lecture, we have seen a greedy algorithm that, given a undirected, unweighted graph and natural number $k \geq 2$, computes a $(2k - 1)$-spanner. Show that, by adapting the greedy algorithm, we can compute a $(2k - 1)$-spanner with $O(n^{1+1/k})$ edges for any *weighted* graph.