PS Algorithmen für verteilte Systeme

https://avs.cs.sbg.ac.at/

Übungsblatt 5

Aufgabe 1

Deutsch: Zeigen Sie, dass im CONGEST Modell eine 2-Approximation $\hat{D}$ des (ungewichteten) Durchmessers D des Netzwerks in $O(D)$ Runden bestimmt werden kann. Gesucht ist also eine Zahl $\hat{D}$, so dass $\frac{1}{2}D \leq \hat{D} \leq D$. Sie dürfen davon ausgehen, dass bereits ein Leader bestimmt wurde.

Hinweis: Die Dreiecksungleichung besagt, dass $\operatorname{dist}(u, v) \leq \operatorname{dist}(u, w) + \operatorname{dist}(w, v)$ für alle Knoten u, v und w.

English: Show that, in the CONGEST model, we can comute a 2-approximation $\hat{D}$ of the (unweighted) diameter D of the network in $O(D)$ rounds. That means, we are looking for a integer $\hat{D}$ such that $\frac{1}{2}D \leq \hat{D} \leq D$. You can assume that we already have a designated leader.

Hint: The triangle inquality says that $\operatorname{dist}(u, v) \leq \operatorname{dist}(u, w) + \operatorname{dist}(w, v)$ for all nodes u, v and w.

Aufgabe 2

Deutsch: Zeigen Sie, dass im CONGEST Modell eine $O(\log n)$-Approximation des APSP Problems für ungewichtete Graphen mit n Knoten durch einen Las-Vegas Algorithmus mit erwarteter Rundenzahl $O(n \log n)$ berechnet werden kann. Jeder Knoten u soll also am Ende für jeden anderen Knoten v eine Zahl $\delta(u, v)$ kennen, so dass $\operatorname{dist}(u, v) \leq \delta(u, v) \leq O(\log n) \cdot \operatorname{dist}(u, v)$. (Sie können davon ausgehen, dass bereits ein Leader bestimmt wurde.)

Hinweis: In der Vorlesung wurde nur ein *Monte Carlo*-Algorithmus für die *exakte* APSP-Berechnung vorgestellt. Es gibt mehrere Lösungsansätze für diese Aufgabe, insbesondere wäre es möglich den Durchmesser in der gefordeten erwarteten Laufzeit auch exakt zu berechnen.

English: Show that, in the CONGEST model, we can compute an $O(\log n)$-approximation of APSP on unweighted graphs with n nodes with Las-Vegas algorithm, which has $O(n \log n)$ rounds in expectation. That means, that at the end every node u knows for every other node v a estimate $\delta(u, v)$ such that $\operatorname{dist}(u, v) \leq \delta(u, v) \leq O(\log n) \cdot \operatorname{dist}(u, v)$. (You can assume that we already have a designated leader.)

Hint: In the lecture you have seen a *Monte Carlo* Algorithm for computing *exact* APSP. There are multiple solutions to this exercise, in particular it would be possible to also compute the exact diameter in the given expected running time.

Aufgabe 3

Deutsch: Zeigen Sie, dass im CONGEST Modell eine $(1+\epsilon)$-Approximation für das SSSP Problem für gewichtete Graphen mit n Knoten in $O(\sqrt{nD}\log^3(n)/\epsilon)$ Runden berechnet werden kann (wenn das höchste Kantengewicht W polynomiell in n ist, also $W = n^{O(1)}$).

Hinweis: „Simulieren" Sie eine geeignete Variante von Dijkstras Algorithmus auf dem Overlay Netzwerk $H = (Z, Z \times Z)$, dessen Knoten die Zentren sind und dessen Kantengewichte den approximativen h-Distanzen zwischen den Zentren entsprechen.

English: Show that, in the CONGEST model, we can compute a $(1+\epsilon)$-approximation of SSSP for weighted graphs with n nodes in $O(\sqrt{nD}\log^3(n)/\epsilon)$ rounds, assuming that the highest weight is polynomial in n, i.e., $W = n^{O(1)}$.

Hint: 'Simulate' a adapted version of Dijkstra's algorithm on an overlay network $H = (Z, Z \times Z)$, where the nodes are the centers and the edge weights are the approxumate h-distances between the centers.

Aufgabe 4

Deutsch: Gegeben sei ein Las-Vegas-Algorithmus für ein Problem P im CONGEST Modell mit einer (allen Knoten explizit bekannten) erwarteten Laufzeit von $R(n)$ Runden für ein Netzwerk mit n Knoten. Zeigen Sie, dass es für ein Netzwerk mit n Knoten und Durchmesser D einen Monte-Carlo-Algorithmus für P im CONGEST Modell gibt, der, für jedes gegebene $c \geq 1$, immer Laufzeit $O((R(n)+D) \cdot c \log n)$ hat und mit Wahrscheinlichkeit mindestens $1 - \frac{1}{n^c}$ korrekt ist.

Hinweis: Markov Bound

English: Given is a Las-Vegas algorithm for a problem P in the CONGEST model, with a running time $R(n)$ (that is known to every node) for a network of n nodes. Show that, for a network with n nodes and diameter D, there exists a Monte-Carlo algorithm for P in the CONGEST model, which, for every $c \geq 1$, has a running time $O((R(n)+D) \cdot c \log n)$ and with probability $1 - \frac{1}{n^c}$ gives a correct output.

Hint: Markov bound