PS Algorithmen für verteilte Systeme

`https://avs.cs.sbg.ac.at/`

Übungsblatt 6

Aufgabe 1

Deutsch: In der Vorlesung analysieren wir den Prozess der epidemischen Informationsausbreitung nur für vollständige Graphen. Dabei werden sowohl im Push- als auch im Pull-Modell mit hoher Wahrscheinlichkeit $\Theta(\log n)$ viele Runden benötigt bis alle n Knoten des Netzwerks infiziert sind. Zeigen Sie, anhand einer geeigneten Klasse von Beispielgraphen, dass sich für allgemeine Graphen mit n Knoten bei ungünstiger Startkonfiguration die Anzahl der benötigten Runden im Push- und Pull-Modell um *mehr* als einen konstanten Faktor unterscheiden kann.

English: In the lecture, we only analyze the rumour spreading process for complete graphs. We showed in both the Push and Pull model that with high probability we need $\Theta(\log n)$ rounds to infect all n nodes. Show that, using a class of graphs of your choice, in general graphs with n nodes there are unfavorable start configurations such that the required number of rounds in the Push and the Pull model can differ by *more* than a constant factor.

Aufgabe 2

Deutsch: In der Vorlesung wurde bewiesen, dass während der Wachstumsphase im Push-Modell der Wachstumsfaktor für die Anzahl der infizierten Knoten mit Wahrscheinlichkeit höchstens $\frac{1}{e^{1/24}}$ höchstens $\frac{7}{6}$ beträgt, also dass $\Pr[I(t+1) \leq \frac{7}{6}I(t)] \leq \frac{1}{e^{1/24}}$ unter der Voraussetzung $I(t) \leq \frac{n}{3}$ gilt. Zeigen Sie, ausgehend von dieser Ungleichung, mittels Anwendung der Chernoff-Bound, dass die Wachstumsphase aus $O(\log n)$ Runden besteht.

English: In the lecture we have shown that in the push model during the growth phase the growth factor for the number of infected nodes is less then $\frac{7}{6}$ with probability at most $\frac{1}{e^{1/24}}$, i.e., that $\Pr[I(t+1) \leq \frac{7}{6}I(t)] \leq \frac{1}{e^{1/24}}$ under the assumption that $I(t) \leq \frac{n}{3}$. Show using a Chernoff bound that, assuming this inequality, the growth phase lasts $O(\log n)$ rounds.

Aufgabe 3

Deutsch: Zeigen Sie, dass im Push-Modell für n Knoten folgendes gilt: Wenn $c' \ln n \leq G(t) \leq \frac{2}{3}n$ für eine passende Konstante c' gilt, dann ist $G(t+1) \leq 0.9 \cdot G(t)$ mit hoher Wahrscheinlichkeit (also mit Wahrscheinlichkeit mindestens $1 - \frac{1}{n^c}$ für eine vorgegebene Konstante c).

Hinweis: Die Aussage gilt jedenfalls für $c' = 288c$.

English: Show that in the Push model for n nodes the following is true: when $c' \ln n \leq G(t) \leq \frac{2}{3}n$ for a certain constant c', then $G(t+1) \leq 0.9 \cdot G(t)$ holds with high probability (i.e., with probability at least $1 - \frac{1}{n^c}$ for a given constant c).

Hint: The statement is at least true for $c' = 288c$.

Aufgabe 4

Deutsch: Zeigen Sie, dass im Pull-Modell für n Knoten, ausgehend von einem infizierten Knoten, nach $O((\log n)^2)$ Runden mit hoher Wahrscheinlichkeit mindestens $\frac{n}{\ln n}$ Knoten infiziert sind.

Anmerkung: Diese Aufgabe vervollständigt die Analyse des Pull-Modells, die wir in der Vorlesung nur für den Fall $I(t) > \frac{n}{\ln n}$ durchgeführt haben. Es gibt mehrere Wege, diese Aufgabe zu lösen, und insbesondere ist es mit einfachen Mitteln möglich, eine bessere Schranke von $O(\log n)$ zu zeigen. Der Faktor $\frac{1}{\ln n}$ ist für die Analyse nicht zentral; um die Notation möglichst einfach zu halten, kann es hilfreich sein, auf die etwas stärkere Garantie abzuzielen, mindestens $\frac{n}{3}$ Knoten zu infizieren.

English: Show that in the Pull model for n nodes, assuming one infected node, after $O((\log n)^2)$ with high probability at least $\frac{n}{\ln n}$ are infected.

Remark: This exercise completes the analysis of the Pull model, which in the lecture we have only done for the case $I(t) > \frac{n}{\ln n}$. There are multiple waus to solve this exercise, and in particular it is possible with simple methods to obtain a better bound of $O(\log n)$. The factor $\frac{1}{\ln n}$ is not fundamental; to keep notation as simple as possible, it can be helpful to target a somewhat stronger guarantee of infected at least $\frac{n}{3}$ nodes.