PS Algorithmen für verteilte Systeme

https://avs.cs.sbg.ac.at/

Aufgabenblatt 3

Abgabe bis Sonntag, 19.06.2022, 23:55 Uhr auf Blackboard.

Aufgabe 1

Deutsch: Seien $M > 0$, $T \geq 0$ und sei G ein Graph mit Kantengewichten $\geq M$. Zeigen Sie, dass es einen Algorithmus gibt, der von einem Startknoten s aus alle Knoten v mit $\text{dist}_G(s, v) \leq T$ sowie deren Distanz $\text{dist}_G(s, v)$ in $O(T/M)$ Runden berechnet, wobei jeder Knoten höchstens in einer Runde Nachrichten sendet (also $O(m)$ Nachrichten insgesamt gesendet werden).

English: Let $M > 0$, $T \geq 0$ and let G be a graph with edge weights $\geq M$. Show that there exists an algorithm that, given a source node s, computes all nodes v with $\text{dist}_G(s, v) \leq T$ as well as thir corresponding distances $\text{dist}_G(s, v)$ in $O(T/M)$ rounds, where every node sends messages in at most one round (hence we have $O(m)$ messages in total).

Aufgabe 2

Deutsch: Gegeben sei ein (Monte-Carlo) Algorithmus für das (exakte) APSP Problem für gewichtete Graphen, der im CONGEST Modell mit hoher Wahrscheinlichkeit eine korrekte Lösung berechnet (und mit geringer Wahrscheinlichkeit falsche Distanzwerte berechnet). Zeigen Sie, dass die Korrektheit einer Ausgabe dieses Algorithmus (die für jeden Knoten aus den $n - 1$ Distanzen zu allen anderen Knoten besteht) in $O(n)$ Runden verifiziert werden kann.

English: Suppose that we are given a (Monte-Carlo) algorithm for (exact) APSP on weighted graphs, which in the CONGEST model gives a correct solution with high probability (and with low probability outputs incorrect distances). Show that we can check the correctness of the output of this algorithm (which for every node consists of the $n - 1$ distances to all other nodes) in $O(n)$ rounds.

Aufgabe 3

Deutsch: Wir betrachten einen vollständigen Graph G im Pull-Modell, in dem nach t Runden der relative Anteil infizierter Knoten $i(t)$ beträgt. Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, dass nach einer weiteren Runde alle Knoten infiziert sind, höchstens $i(t)$ ist.

English: Consider a complete graph G in the Pull Model, in which the fraction of infected nodes after round t is $i(t)$. Show that the probability that all nodes are infected after one further round is at most $i(t)$.

Bonusaufgabe 1

Deutsch: Sei G ein Graph mit maximalem Knotengrad Δ. Zeigen Sie das es einen Algorithmus gibt, der in $O(d + \Delta^d)$ Runden für jeden Knoten einen Breitensuchbaum bis zur Tiefe d berechnet (für einen beliebig gewählten Parameter d).

Anmerkung: Ihre Lösung darf einen randomisierten Algorithmus verwenden (evtl. mit einem zusätzlichen Faktor $\log(n)$ in der Laufzeit). Unserer Meinung nach ist der zielführendste Ansatz aber, einen deterministischen Algorithmus zu entwickeln.

English: Let G be a graph with maximum node degree Δ. Show that there exists an algorithm that computes a BFS tree from each node up to depth d in $O(d + \Delta^d)$ rounds.

Remark: You are allowed to give a randomized algorithm at the cost of an extra $(\log n)$-factor in the running time. However, we believe that the most straightforward solution uses a deterministic algorithm.